

ANDRZEJ JANKOWSKI
Polish Academy of Sciences
Institute of Oceanology — Sopot

ZYGMUNT KOWALIK
Institute of Meteorology and Water Management
Marine Department — Gdynia

WIND-DRIVEN CIRCULATION IN THE BALTIC SEA (HOMOGENEOUS BASIN)

Contents: 1. Introduction, 2. Equations and boundary conditions, 3. Physical parameters applied to the model, 4. The results of preliminary calculations; Streszczenie; Résumé; References.

1. INTRODUCTION

The computation of wind-driven steady circulation in the Baltic is given by the numerical solution of the unsteady equation of motion. The equations of mass transport and sea level (MTSL) are solved in time until a steady motion occurs. This approach enables the estimation of the absolute value of the sea level directly from hydronumerical equations.

In previous papers by Kowalik [6, 7], Staśkiewicz [8] and others, the classical way of solving the problem by adopting the stream function of the mass transport (MSF) for the steady state equation was presented.

It is worth noting that the MTSL method may be directly applied to the calculation of unsteady wind-driven circulation in the sea.

2. EQUATIONS AND BOUNDARY CONDITIONS

The equations for unsteady wind-driven flows are taken as — Druet, Kowalik [1, 6].

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \Omega v + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \Omega u + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

$$\text{where: } t = 0; u = v = w = \zeta = 0 \quad (4)$$

At the free surface ($z = \zeta$) we assume the following boundary conditions:

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + v_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (5)$$

$$\rho_0 A \frac{\partial u}{\partial z} = T_x; \quad \rho_0 A \frac{\partial v}{\partial z} = T_y \quad (6)$$

and at the bottom ($z = -H$):

$$w = -u_H \frac{\partial H}{\partial x} - v_H \frac{\partial H}{\partial y} \quad (7)$$

$$\rho_0 A \frac{\partial u}{\partial z} = R M_x; \quad \rho_0 A \frac{\partial v}{\partial z} = R M_y \quad (8)$$

where:

- u, v, w — components of current velocity along,
- x, y, z — axes respectively (the origin of the rectangular system of coordinates is at the sea surface: x — points to the East, y — to the North and z — vertical upwards),
- ζ — sea level variation from its undisturbed surface,
- $u_{\zeta}, v_{\zeta}, u_H, v_H$ — horizontal current components at the sea surface, and at the bottom respectively,
- A — eddy viscosity coefficient,
- ρ_0 — density (taken as a constant later on),
- Ω — Coriolis parameter,
- g — earth gravity acceleration,
- T_x, T_y — components of wind stress at the sea surface,
- R — coefficient of the bottom stress,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-H}^{\zeta} \rho_c u \, dz \\ M_y &= \int_{-H}^{\zeta} \rho_c v \, dz \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{components of mass transport along} \\ \text{x, y axes respectively.} \end{array}$$

Integrating equations (1—3) from the bottom to the sea surface and taking into consideration the boundary conditions (5—8), we obtain, after certain transformations, the equations of mass transport and sea level:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} - T_x + R M_x - \Omega M_y + \rho_0 g H \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

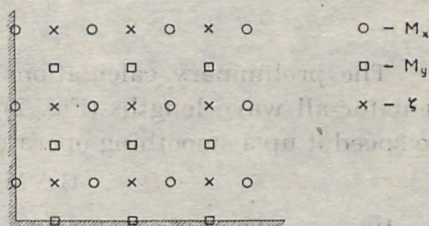
$$\frac{\partial M_y}{\partial t} - T_y + R M_y + \Omega M_x + \rho_0 g H \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

Assuming suitable initial and boundary conditions for M_x , M_y , ζ we may solve the equations (9—11). Due to the difficulty in obtaining the proper boundary conditions for the sea level, such a numerical scheme was chosen which permitted us to avoid this obstacle. For this purpose, the numerical grid given in Fig. 1 [3] is suitable. It allows us to treat the boundary in such a way, that only one of the mass transport components i.e. normal to the contour, is present at the boundary.

Fig. 1. Numerical grid

Ryc. 1. Siatka numeryczna



The finite — difference form of equations (9—11) written in the numerical grid, is:

$$M_{x m+1, n}^{t+\tau} = M_{x m+1, n}^{t-\tau} (1 - 2 R \tau) + \frac{1}{2} \Omega \tau \bar{M}_y - g \frac{\tau}{h} H_{m+1, n} (\zeta_{m+2, n}^t - \zeta_{m, n}^t) + T_{x m+1, n} \quad (12)$$

$$M_{y, m, n+1}^{t+\tau} = M_{y, m, n+1}^{t-\tau} (1 - 2 R \tau) + \frac{1}{2} \Omega \tau \bar{M}_x - g \frac{\tau}{h} H_{m, n+1} (\zeta_{m, n+2}^t - \zeta_{m, n}^t) + T_{y, m, n+1} \quad (13)$$

$$\zeta_{m, n}^{t+2\tau} = \zeta_{m, n}^t - \frac{\tau}{h} (M_{x m+1, n}^{t+\tau} - M_{x m, -1, n}^{t+\tau} + M_{y m, n+1}^{t+\tau} - M_{y m, n-1}^{t+\tau}) \quad (14)$$

where:

$$\bar{M}_x = \frac{1}{4} (M_{x m-1, n+2}^{t-\tau} + M_{x m-1, n}^{t-\tau} + M_{x m+1, n}^{t-\tau} + M_{x m-1, n+2}^{t-\tau})$$

$$\bar{M}_y = \frac{1}{4} (M_{y m+2, n+1}^{t-\tau} + M_{y m, n+1}^{t-\tau} + M_{y m, n-1}^{t-\tau} + M_{y m+2, n-1}^{t-\tau})$$

τ, h — time and spaces steps of numerical grid.

The difference scheme (12—14) approximates the differential operators up to the first order in time and the second order in space [5]. The numerical stability conditions for the case of the shortest waves in the numerical grid are [4]:

$$\tau \leq \frac{1}{R}; \quad \tau \leq \frac{1}{2R} \quad (15)$$

$$\tau \leq -\frac{R h^2}{4 g H} + \frac{h}{\sqrt{2 g H}} \quad (16)$$

The last condition in the frictionless flow ($R \approx 0$) is given by Courant — Friedrichs — Levy's criterion:

$$\pi \leq \frac{h}{\sqrt{2 g H}} \quad (17)$$

The preliminary calculations confirmed that the scheme is convergent for all wave lengths (Fig. 2), but convergence is very slow in time. To speed it up a smoothing operator was applied in the form:

$$B \Delta M_x; \quad B \Delta M_y$$

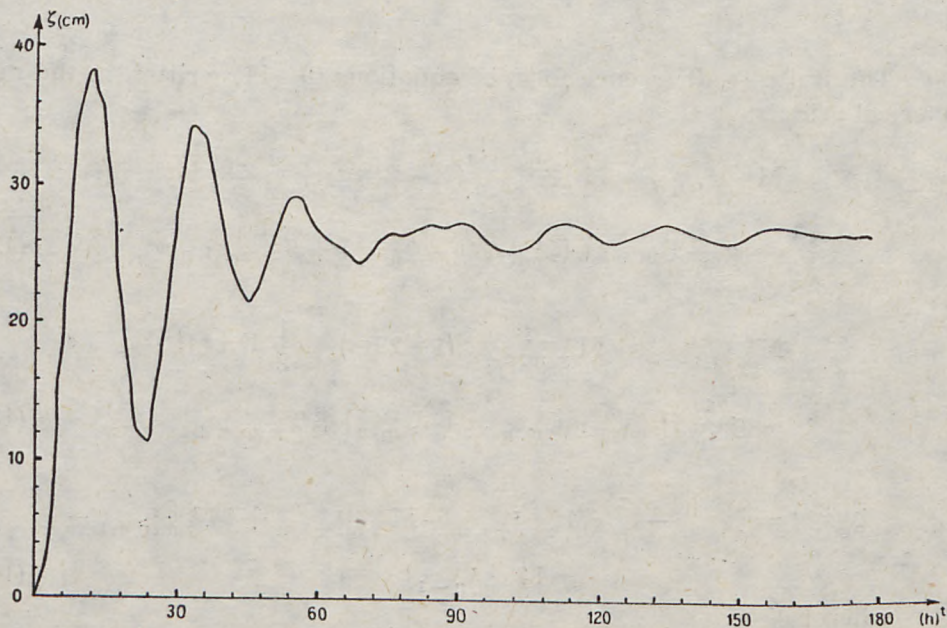


Fig. 2. Sea level time-variations during computations
Ryc. 2. Zmiany poziomu morza w czasie obliczeń

where:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$B = 10^7$ analogue of the lateral eddy viscosity.

3. PHYSICAL PARAMETERS APPLIED TO THE MODEL

The parameters of R , T_x , T_y have to be defined before calculations are performed. In our model we used the following way to ascertain them. The bottom stress coefficient was estimated by Ekman's formula [6]:

$$R = \frac{\pi A}{4 H^2} \quad (18)$$

The eddy viscosity coefficient (A) was calculated by Felzenbaum's theory [2]:

a) for shallow water, if $H \leq H_{kr}$

$$A = 0.54 \cdot 10^{-4} WH, \text{ and} \quad (19)$$

b) for deep water, if $H > H_{kr}$

$$A = 4.7 \cdot 10^{-8} \frac{W^2}{\Omega} \quad (20)$$

where:

$$H_{kr} = 8.7 \cdot 10^{-4} \frac{W}{\Omega}$$

W — absolute value of wind velocity above the sea.

The components of the wind stress T_x , T_y were calculated with the help of the following expressions [1, 2]:

$$T_x = \gamma W W_x \quad (21)$$

$$T_y = \gamma W W_y \quad (22)$$

where:

$$\gamma = 3.26 \cdot 10^{-6}$$

W_x , W_y — components of the wind speed.

4. THE RESULTS OF PRELIMINARY CALCULATIONS

The results of calculations obtained comprise the vertical distributions of components of current velocity at some chosen points in the Baltic. The current components were calculated by integrating the stationary equations (1, 2) with boundary conditions (6, 8):

$$D = u + i v = \frac{T}{\rho_0 A k_1} \frac{c h k_1 (H + z)}{s h k_1 (H + \zeta)} - \frac{R M}{\rho_0 A k_1} \frac{c h k_1 (z - \zeta)}{s h k_1 (H + \zeta)} + \frac{g}{\Omega} i \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \quad (23)$$

where:

$$i = \sqrt{-1} \quad T = T_x + i T_y$$

$$k_1 = \sqrt{i \frac{\Omega}{A}} \quad M = M_x + i M_y$$

The unknown values of sea level and mass transport components in this expression were found by means of numerical solution of the mass transport and sea level equations (9—11). To make our information about the vertical structure of current more precise, we considered drift and gradient components of current velocity, which were calculated by the formulae:

$$D_r = u_r + i v_r = \frac{T}{\rho_0 A k_1} \frac{c h k_1 (H + z)}{s h k_1 (H + \zeta)} \quad (24)$$

$$D_g = u_g + i v_g = - \frac{R M}{\rho_0 A k_1} \frac{c h k_1 (z - \zeta)}{s h k_1 (H + \zeta)} + \frac{g}{\Omega} i \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \quad (25)$$

In the calculations we took the time step as $\tau = 60$ sec, the numerical grid step as $h = 5$ Nm and the Coriolis parameter was equal to $\Omega = 1.2368 \cdot 10^{-4}$. The wind field was homogeneous. The speed of the wind was $W = 10$ m/s. Two cases of wind directions were considered — wind from the south and wind from the west. Figures 3—5 illustrate the results of calculations.

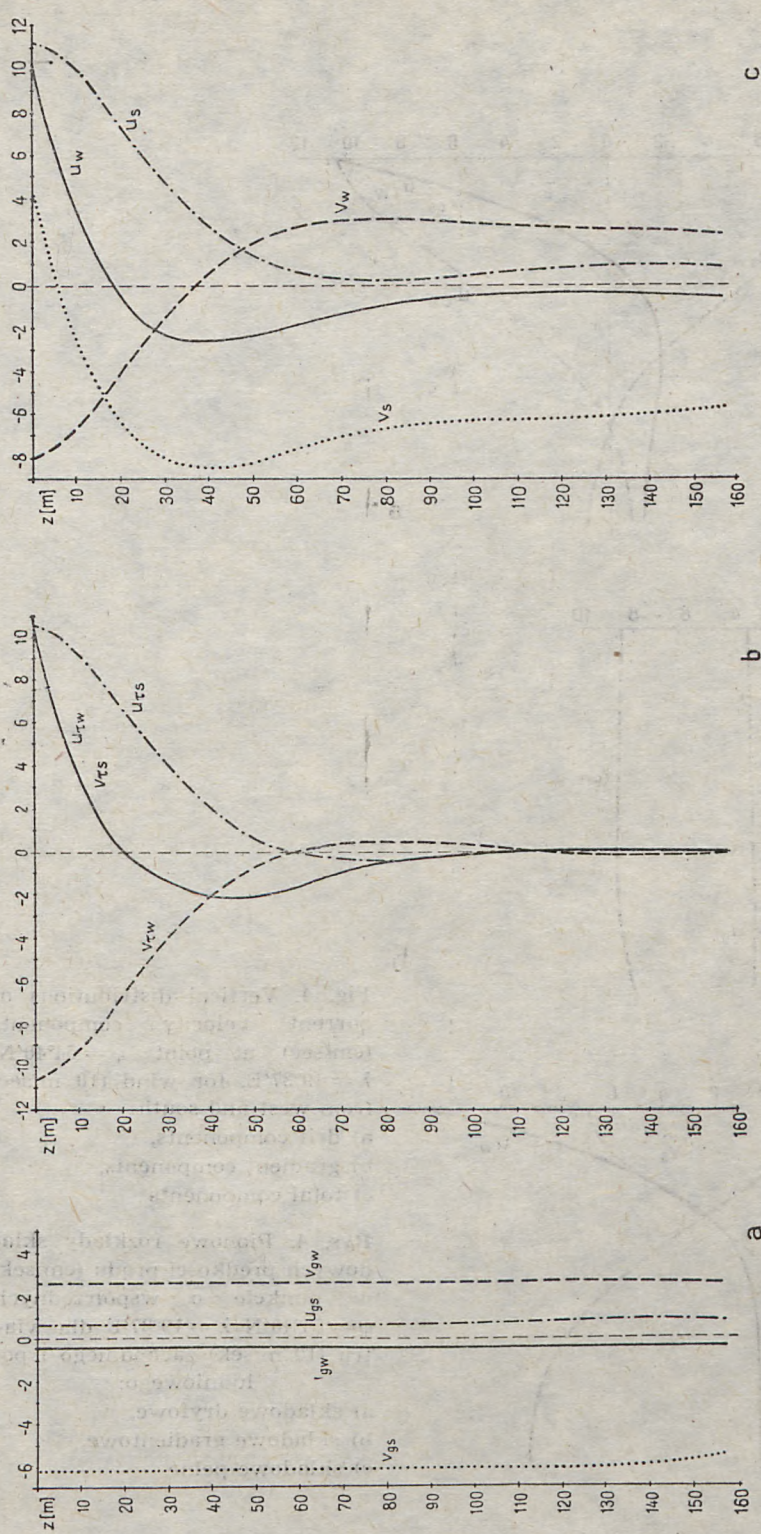
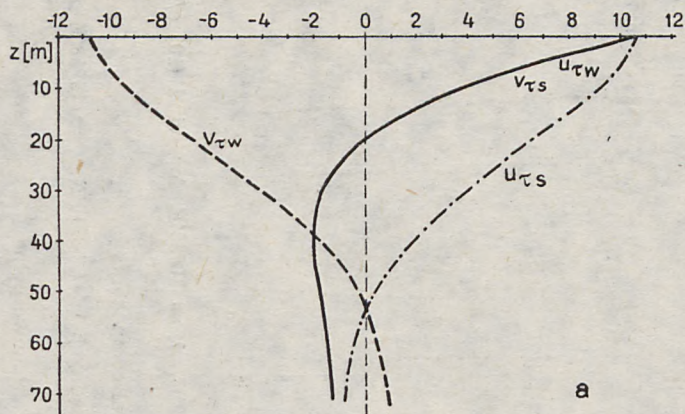


Fig. 3. Vertical distributions of current velocity components (cm/sec) at point $\psi = 58^{\circ}10'N$, $\lambda = 10^{\circ}58'E$, for wind (10 m/sec) from west and south:

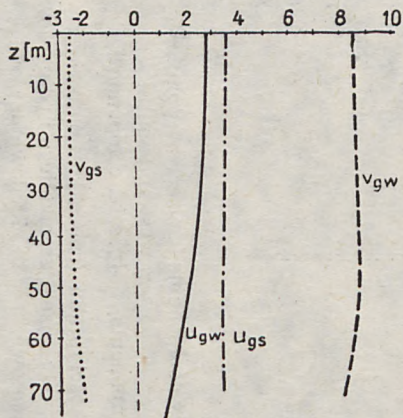
a) gradient components, b) drift components, c) total components

Ryc. 3. Pionowe rozkłady składowych prędkości prądu (cm/sec) w punkcie o współrzędnych $\psi = 58^{\circ}10'N$, $\lambda = 10^{\circ}58'E$ dla wiatru (10 m/sec) zachodniego i południowego:

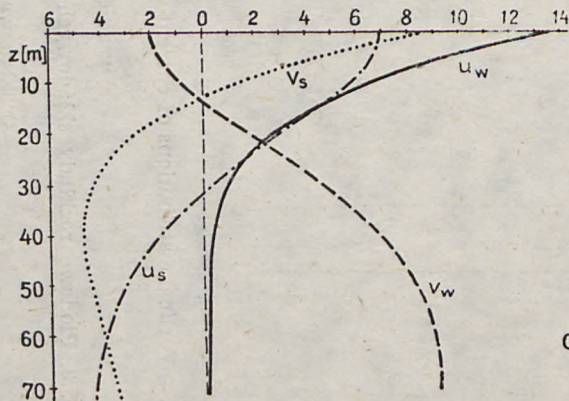
a) składowe gradientowe, b) składowe dryfowe, c) składowe pełne



a



b



c

Fig. 4. Vertical distributions of current velocity components (cm/sec) at point $\psi = 54^{\circ}40'N$, $\lambda = 19^{\circ}37'E$, for wind (10 m/sec) from west and south:

- a) drift components,
- b) gradient components,
- c) total components

Rys. 4. Pionowe rozkłady składowych prędkości prądu (cm/sec) w punkcie o współrzędnych $\psi = 54^{\circ}40'N$ $\lambda = 19^{\circ}37'E$ dla wiatru (10 m/sec) zachodniego i południowego:

- a) składowe dryfowe,
- b) składowe gradientowe,
- c) składowe pełne

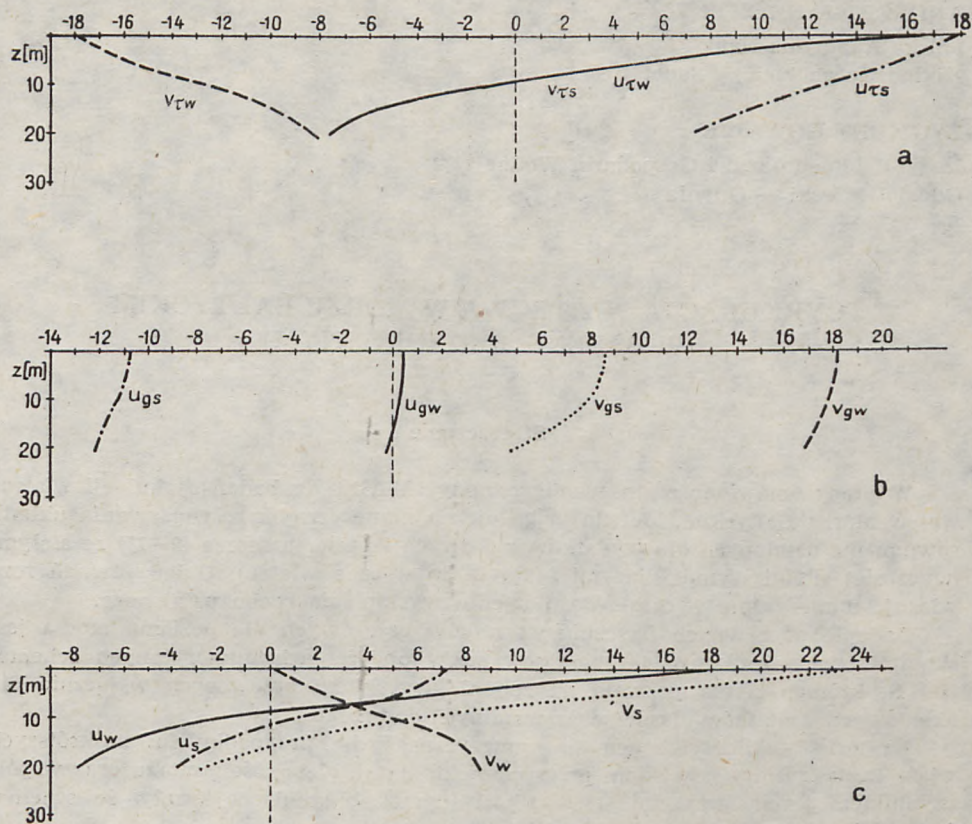


Fig. 5. Vertical distributions of current velocity components (cm/sec) at point $\psi = 57^{\circ}50'N$, $\lambda = 22^{\circ}11'E$, for wind (10 m/sec) from west and south:

- drift components,
- gradient components,
- total components

Ryc. 5. Pionowe rozkłady składowych prędkości prądu (cm/sek) w punkcie o współrzędnych $\psi = 57^{\circ}50'N$, $\lambda = 22^{\circ}11'E$ dla wiatru (10 m/sek) zachodniego i południowego

- składowe dryfowe,
- składowe gradientowe,
- składowe pełne

ANDRZEJ JANKOWSKI

Polska Akademia Nauk
Zakład Oceanologii — Sopot

ZYGMUNT KOWALIK

Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej
Oddział Morski — Gdynia

CYRKULACJA WIATROWA W MORZU BAŁTYCKIM (W BASENIE JEDNORODNYM)

Streszczenie

W pracy omówiono zastosowanie metody „MTSL” do badań cyrkulacji wiatrowej w Morzu Bałtyckim. Metoda ta bazuje na numerycznym rozwiązywaniu układu równań nie ustalonych dla wydatków masowych i poziomu morza (9—11) ze stałymi (w czasie) siłami wymuszającymi (naprężenie styczne wiatru). Układ równań rozwiązuje numerycznie w czasie do momentu wystąpienia ruchu ustalonego.

Zadanie poprawnych fizycznie warunków brzegowych dla poziomu morza jest skomplikowane i dlatego też zastosowano w obliczeniach numerycznych schemat $H-N$, którego siatka pozwala na zadanie warunków brzegowych wyłącznie dla składowych wydatków masowych, normalnych do brzegu.

Kryteria stabilności schematu numerycznego dla przypadku fal najkrótszych wiążą krok czasowy z krokiem przestrzennym siatki, głębokością morza oraz współczynnikiem tarcia przy dnie (15—17). Wstępne obliczenia wykazały, że schemat jest zbieżny i dla pozostałych długości fal (ryc. 2).

Składowe prędkości prądu obliczono na podstawie analitycznej zależności (23), otrzymanej przez całkowanie ustalonych równań ruchu (1, 2) z warunkami brzegowymi (6, 8).

Przedstawione rezultaty wstępnych obliczeń (ryc. 3—5) ilustrują pionową strukturę składowych całkowitych prędkości prądu oraz składowych dryfowych i gradientowych dla wiatru zachodniego i południowego o stałej prędkości 10 m/s.

ANDRZEJ JANKOWSKI

Acedemie Polonaise des Sciences
Institut Oceanologique — Sopot

ZYGMUNT KOWALIK

Institut de Meteorologie et d'Economie des Eaux
Departement Meritime — Gdynia

CIRCULATION DUE PAR LE VENT DANS LA MER BALTIC (BASSIN HOMOGENE)

Résumé

Dans ce travail, les auteurs présentent l'application de la méthode „MTSL” à l'étude de la circulation du vent dans la Mer Baltique. Cette méthode est basée sur la résolution numérique d'un système d'équations non-définies pour les débits-masse et le niveau de la mer (9—12) avec des forces de contrainte constantes dans le temps (contrainte tangentielle du vent). Le système d'équations es résolu numériquement dans le temps jusqu'à l'apparition d'un mouvement stabilisé.

L'introduction des conditions aux limites — correctement définies du point de vue de la physique — pour le niveau de la mer, s'avère très compliquée, et c'est la raison pour laquelle on a utilisé, dans les calculs numériques, le schéma H-N dont le maillage permet la définition des conditions aux limites pour les composantes de débit-masse, perpendiculaires à la côte- exclusivement.

Dans le cas des vagues les plus courtes, les critères de stabilité du schéma numérique relient entre eux le pas de temps et le pas d'espace du maillage, la profondeur de la mer, ainsi que le coefficient de frottement sur le fond (15—17). Les calculs préliminaires ont montré que le schéma est également convergent pour les autres longueurs de vagues (Fig. 2). Les composantes de la vitesse du courant ont été calculées sur la base de la relation analytique (23) obtenue par intégration des équations de mouvement établies (1, 2) avec les conditions aux limites (6, 8).

Les résultats des calculs préliminaires que nous avons présentés (Fig. 3—5) illustrent la structure verticale des composantes intégrales de la vitesse du courant, ainsi que les composantes de dérive et de gradients pour un vent d'ouest et pour un vent du sud de vitesse constante 10m/s.

REFERENCES

LITERATURA

1. Druet Cz., *Dynamika morza*, Gdańsk 1970.
2. Felzenbaum A.I., *Tieoreticzeskije osnovy i metody rassczota ustanowiw-szichsia tieczenij*, Izd. AN SSSR, Moskwa 1960.
3. Hansen W., *Hydrodynamical methods applied to oceanographic problems*, Proc. Sympos. Mathem.-Hydrodyn. Methods of Phys. Oceanography, Hamburg 1962.

4. Jankowski A., *Pewne aspekty zastosowania schematu różnicowego H—N do obliczeń cyrkulacji wiatrowej*, *Studia i Materiały Oceanologiczne* 16, 1976, 21—38.
5. Kagan B.A., *O swoistwach niekórych raznostnyh schiem ispolzujemyh pri czislenom integrirowani urawnienij dynamiki priliwow*, *Fizika Atmosfiery i Okieana* 6, 1970, 7, 704—717.
6. Kowalik Z., *Wind-driven circulation in a shallow sea with application to the Baltic Sea I*, *Acta Geophysica Polon.* 21, 1969, 1, 13—38.
7. Kowalik Z., *Ustalone prądy wiatrowe w płytkich morzach z zastosowaniem do Morza Bałtyckiego II*, *Przegląd Geofizyczny*, 15(23), 1970, 2, 145—162.
8. Staśkiewicz A., *Diagnosticzeskije raszczoty cyrkulacyi w baroklinnyh basiejnach*, *Institut Okieanologii AN SSSR, Moskwa 1974, praca doktorska — maszynopis.*