

GABRIEL CHABERT D'HIÈRES

JEAN-LOUIS SUBERVILLE

Université de Grenoble I

Institut de Mécanique

ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPERIMENTALE DES ONDES INTERNES EN MILIEU STRATIFIÉ TOURNANT

Table des matières: 1. Position du problème Hypothèses physiques. Equations. 2. Propriétés générales des solutions sinusoïdales en t du système (1) et (2), 3. Seiches dans un Bassin parallélépipédique tournant, 4. Résultats expérimentaux, 5. Conclusion; Streszczenie; Summary; Bibliographie.

1. POSITION DU PROBLÈME. HYPOTHÈSES PHYSIQUES. EQUATIONS

Le nombre des phénomènes physiques associés aux ondes internes est très grand. Dans le cas des fluides tournants, les mouvements non permanents se trouvent dans les masses homogènes [2, 9] aussi bien que dans celles où la densité varie avec la cote.

Nous disons qu'il y a „seiche externe” lorsque les amplitudes des oscillations verticales des particules liquides sont notables à la surface libre, par rapport à celles que l'on rencontre au sein du fluide. La seiche est „interne” dans le cas contraire.

Nous nous limitons ici à l'étude théorique et expérimentale des seiches animant une „bicouche”, c'est-à-dire: deux fluides superposés de densités différentes. On trouvera en [9] l'étude de nombreux cas particuliers différents. Plusieurs des paragraphes suivants ont été empruntés à [6].

Nous admettons a priori que:

- le bassin est prismatique (ou cylindrique), à génératrices verticales, à fond horizontal, à parois lisses.
- il est animé d'un mouvement de rotation uniforme ω autour de l'axe vertical fixe Oz (orienté vers le haut).
- la vitesse ω , les dimensions horizontales du bassin et sa distance moyenne à Oz sont supposées assez petites pour que, dans toute la masse

liquide, la force centrifuge soit négligeable et que l'accélération de la pesanteur g soit uniforme.

- le liquide est incompressible et parfait.
- les amplitudes des oscillations et les vitesses sont assez petites pour légitimer l'emploi des équations linéarisées de l'hydrodynamique.
- au repos et pour $\omega = 0$, la masse du liquide est constituée par une bicouche, c'est-à-dire par une superposition de deux couches de liquides homogènes mais de densités différentes (et d'ailleurs voisines). Le cas du liquide homogène sera considéré comme un cas limite.
- les tensions superficielles le long de la surface libre et de l'interface entre deux liquides (dans le cas d'une bicouche) sont négligées.

On notera que nous n'adoptons pas l'hypothèse simplificatrice, dite des ondes longues, utilisée jusqu'ici par tous les Auteurs.

On affectera de l'indice 1 (ou 2) les caractéristiques (densité, vitesse, etc...) de la couche supérieure (ou inférieure). On omettra d'écrire l'indice $i = 1, 2$, lorsqu'il n'y a pas lieu de préciser la couche correspondante. Soit $Oxyz$, le repère orthonormé, lié au bassin, D , la section droite de celui-ci (format un domaine borné) que, pour simplifier, nous supposons simplement connexe; \bar{D} , la frontière de D , supposée régulière; \vec{n} , le vecteur unitaire de composantes $\alpha, \beta, 0$, porté par la normale extérieure en un point courant des parois latérales du bassin: ρ_i , la masse volumique du liquide i ; $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 > 0$; h_i , l'épaisseur de la couche i à l'état d'équilibre absolu ($\omega = 0$); d_i , le domaine occupé par la couche i dans cet état et défini par:

$$\left. \begin{array}{l} d_1 : 0 \leq z \leq h_1 \\ d_2 : -h_2 \leq z \leq 0 \end{array} \right\} \forall (x, y) \in (D + \bar{D}).$$

\bar{d}_i , la frontière de d_i . Ainsi, à l'état d'équilibre absolu l'interface entre les deux liquides, notée S , se confond avec le plan $z = 0$, alors que la surface libre, notée Σ , est située dans le plan $z = h_1$ (dans le même état).

Soient U_i, V_i, W_i les composantes de \vec{V}_i et P_i le potentiel des accélérations.

Les équations de l'hydrodynamique linéarisée s'écrivent:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + 2 \vec{\omega} \times \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (1.1)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (1.2)$$

Avec les conditions aux limites écrites pour $\forall \in (0, \infty)$

$$W_2(x, y, -h_2, t) = 0; \quad \forall (x, y) \in (D + \bar{D}) \quad (2.1)$$

$$\alpha U_i + \beta V_i = 0; \quad \forall z \in (-h_2, h_1); \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \quad \forall i \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial P_1(x, y, h_1, t)}{\partial t} + g W_1(x, y, h_1, t) = 0; \quad \forall (x, y) \in (D + \bar{D}) \quad (2.3)$$

$$W_1(x, y, 0, t) - W_2(x, y, 0, t) = 0; \quad \forall (x, y) \in (D + \bar{D}) \quad (2.4)$$

$$e_1 \left[\frac{\partial P_1(x, y, 0, t)}{\partial t} + g W_1(x, y, 0, t) \right] - e_2 \left[\frac{\partial P_2(x, y, 0, t)}{\partial t} + g W_2(x, y, 0, t) \right] = 0; \\ \forall (x, y) \in (D + \bar{D}) \quad (2.5)$$

2. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SOLUTIONS SINUSOÏDALES EN t DU SYSTÈME (1) et (2)

2.1. Equations résolutives

On élimine \vec{V} entre les équations (1)

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial t^2} + 4 \omega^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Une fois résolue (3), (1₁) fournit trois équations scalaires en \vec{V} (U, V, W).

Dans certaines questions, il y a intérêt à disposer de l'équation que vérifie ε : déplacement vertical de la particule liquide se trouvant en x, y, z lors du repos. Pour former celle-ci, on dérive (3) en z et on remplace dans le résultat $\frac{\partial P}{\partial z}$ par $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$ (cf. l'équation (1₁) en projection sur Oz). On trouve ainsi:

$$\frac{\partial^4 (\Delta \varepsilon)}{\partial t^4} + 4 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right) = 0$$

En intégrant cette relation deux fois en t, on obtient:

$$\frac{\partial^2 \Delta \varepsilon}{\partial t^2} + 4 \omega^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = A(x, y, z) + t B(x, y, z)$$

où A et B sont des fonctions arbitraires de leurs arguments. La présence du terme séculaire en t étant incompatible avec l'hypothèse $|\varepsilon|$ petit $\forall t$, on fera $B \equiv 0$. Par ailleurs, en posant:

$$A = 4 \omega^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}$$

$$\varepsilon = u + A_1$$

on voit que la nouvelle inconnue u vérifie l'équation:

$$\frac{\partial^2 (\Delta u)}{\partial t^2} + 4 \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

identique à (3) dont P est solution. Les raisonnements de [4] montrent d'ailleurs qu'on ne restreint pas la généralité en prenant $A_1 \equiv 0$.

2.2. Solutions harmoniques en t de (4)

Cherchons les solutions particulières de (4) sous la forme classique de Fourier:

$$\varepsilon(x, y, z, t) = \varepsilon_0(x, y) \varphi(z) f(t) \quad (5)$$

Portant (5) dans (4) et en séparant les variables, on trouve:

$$\frac{f''}{f} = k; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial y^2} + \lambda \varepsilon_0 = 0; \quad (4 \omega^2 + k) \varphi'' - k \lambda \varphi = 0$$

où λ et k sont des constantes arbitraires. Nous écartons le cas: $f = \text{Cte}$, dépourvu d'intérêt physique. Alors, si $k = 0$, f est linéaire en t ; et si $k > 0$ on a $f = \text{ch}(\sqrt{k} t)$.

Dans ces deux éventualités, $f \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse des petits mouvements. Nous prendrons donc $k = -\Theta^2$, Θ étant réel. Il s'en suit que $f(t)$ est la combinaison linéaire de deux fonctions sinusoïdales indépendantes:

$$f(t) = \begin{cases} \cos \Theta t \\ \sin \Theta t \end{cases} \quad (6)$$

Si alors $4 \omega^2 + k = 4 \omega^2 - \Theta^2 = 0$, on doit avoir ou bien $\varphi(z) = 0$, ou bien $\lambda = 0$; dans ce dernier cas $\varepsilon_0(x, y)$ est harmonique et $\varphi(z)$ complètement indéterminée. Si $\lambda = 0$, $4 \omega^2 - \Theta^2 \neq 0$, $\varphi(z)$ est linéaire. Ce cas peut aussi se rattacher à la théorie des ondes longues; nous le laissons de côté. Rappelons que l'hypothèse $4 \omega^2 - \Theta^2 = 0$ correspond en Océanographie au cas dit des latitudes critiques; nous écarterons cette éventualité jusqu'à nouvel ordre. Posons alors:

$$q^2 = \frac{\lambda \Theta^2}{\Theta^2 - 4 \omega^2} \quad \text{lorsque} \quad \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \Theta^2 - 4 \omega^2 \neq 0 \end{cases}$$

où q est, suivant la notation de [6], un nombre réel ou imaginaire pur, selon le signe du second membre. On ne discutera ici que le cas où $\lambda > 0$. Les cas $\lambda < 0$ est à l'étude à l'aide du théorème de Vékua. On voit que $\varphi(z)$ et $\varepsilon_0(x, y)$ sont solutions des équations:

$$\varphi''(z) + q^2 \varphi(z) = 0 \quad (7.1)$$

$$\Delta \varepsilon_0 + q^2 \frac{\Theta^2 - 4 \omega^2}{\Theta^2} \varepsilon_0 = 0 \quad (7.2)$$

Si q est réel, on a, d'après (7.1):

$$\varphi(z) = \begin{cases} c h [q(z + z_0)] \\ s h [q(z + z_0)] \end{cases} \quad (8)$$

L'intégrale générale de (7.1) est une combinaison linéaire des fonctions (8) où z_0 est une constante arbitraire, qu'il est commode d'introduire (cf. § 7) pour simplifier les calculs ultérieurs. Si au contraire, $q = i q_0$, q_0 étant réel, il vient:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \cos [q_0(z + z_0)] \\ \sin [q_0(z + z_0)] \end{cases} \quad (9)$$

Dans toute la suite, nous prendrons $q > 0$ et $q_0 > 0$.

Soient à présent $A(x, y)$ et $B(x, y)$ deux solutions quelconques de (7.2); (4) étant linéaire et homogène, l'expression ci-après:

$$\varepsilon_0(x, y, z, t) = (A \cos \Theta t + B \sin \Theta t) \varphi(z) \quad (10)$$

est encore une solution de cette équation si $\varphi(z)$ est définie, suivant le signe de q^2 , par (8) ou par (9). A chaque valeur de q^2 il existe donc deux solutions du type (10) correspondant aux choix possibles de $\varphi(z)$ dans (8) ou (9). Leur combinaison linéaire à coefficients constants constitue la solution la plus générale du problème qu'on puisse former à partir des solutions (5). Et cela quelles que soient la forme du bassin et la loi de variation de densité pourvu que $\omega \neq 0$.

On calcule alors une solution particulière à partir de (5). On trouve (cf. [6]) en posant: $\varphi_0 = \int \varphi(z) dz$

$$\begin{aligned} P &= -\Theta^2 (A \cos \Theta t + B \sin \Theta t) \varphi_0(z) \\ W &= \Theta (-A \sin \Theta t + B \cos \Theta t) \varphi(z) \end{aligned} \quad (11)$$

d'où on déduit, avec (7.1), en projection sur Ox et Oy , U et V .

2.3. Conditions aux limites (2) pour les solutions harmoniques en t

Condition (2.1)

On doit donc avoir d'après (2.1):

$$\varphi_2(-h_2) = 0$$

Cette condition, étant homogène, impose de prendre pour la solution (8) la fonction sh et on choisit pour solution de (9) la fonction sinus pour $z \in [-h_2, 0]$:

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} m sh [q_2(z + h_2)] & \text{cas (8)} \\ m \sin [q_{02}(z + h_2)] & \text{cas (9)} \end{cases} \Rightarrow \varphi_{02}(z) = \begin{cases} \frac{m}{q_2} ch [q_2(z + h_2)] \\ -\frac{m}{q_2} \cos [q_{02}(z + h_2)] \end{cases} \quad (12)$$

où m désigne constante réelle arbitraire. Eu égard à (10), on a donc, pour solution, la plus générale, du type considéré:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= (A_2 \cos \Theta t + B_2 \sin \Theta t) \varphi_2(z) & \forall z \in (-h_2, 0] \\ W_2 &= \Theta (-A_2 \sin \Theta t + B_2 \cos \Theta t) \varphi_2(z) \\ P_2 &= -\Theta^2 (A_2 \cos \Theta t + B_2 \sin \Theta t) \varphi_{02}(z) & \forall (x, y) \in (D + \bar{D}) \end{aligned} \quad (13)$$

$\varphi(z)$ et $\varphi_{02}(z)$ étant définis univoquement (à un facteur constant près) par (12) dans chacun des cas (8) ou (9).

Condition (2.2)

Soit s , l'abscisse curviligne d'un point courant de \bar{D} , comptée positivement lorsqu'on parcourt ce contour dans le sens direct. Les relations (2.2) donnent après transformation:

$$\begin{aligned} 2\omega \frac{dA}{ds} + \Theta \frac{dB}{dn} &= 0 \\ 2\omega \frac{dB}{ds} - \Theta \frac{dA}{dn} &= 0 \end{aligned} \quad \forall (x, y) \in \bar{D} \quad (14)$$

Les couples de solutions (A_i, B_i) sont donc astreints à vérifier sur \bar{D} les conditions frontières (14), qui sont comme (7.2), linéaires et homogènes. Ils sont donc déterminés par la forme du bassin.

Condition (2.3)

On a vu (cf. (10) et (11)) que ε_1 , W_1 et $\frac{\partial P_1}{\partial t}$ se présentent sous forme de sommes de deux fonctions du type:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (A_1 \cos \Theta t + B_1 \sin \Theta t) \varphi_1(z) \\ W_1 &= \Theta (-A_1 \sin \Theta t + B_1 \cos \Theta t) \varphi_1(z) \\ \frac{\partial P_1}{\partial t} &= -\Theta^3 (-A_1 \sin \Theta t + B_1 \cos \Theta t) \varphi_{01}(z) \end{aligned} \quad (15)$$

caractérisées chacune par le choix de $\varphi_1(z)$ dans (8) ou (9). Si ces deux fonctions sont linéairement indépendantes en (t, x, y) , il s'en suit que chacune d'elles doit vérifier séparément la condition (2.3), qui se réduit à:

$$\Theta^2 \varphi_{01}(h_1) = g \varphi_1(h_1) \quad (16)$$

Nous allons vérifier que (16) ne peut être satisfaite simultanément par les deux fonctions $\varphi_1(z)$, définies par (8) ou (9). Si, par exemple, $q_1^2 > 0$, les relations correspondantes (16) s'écrivent:

$$\Theta^2 = g q_1 \coth [q_1 (h_1 + z_0)]; \quad \Theta^2 = g q_1 \operatorname{th} [q_1 (h_1 + z_0)]$$

et ne sont compatibles que pour $q_1 = \infty$. Mais alors nos formules résolutive seraient dépourvues de sens et c'est pourquoi nous écartons cette éventualité. Il s'en suit que chacune des fonctions ε_1, P_1, W_1 se présente nécessairement sous forme d'une seule fonction du type (10) et (11), correspondant au choix de $\varphi_1(z)$ qui vérifie (16). Dans le cas où $q_1^2 < 0$, les conclusions sont les mêmes.

Pour abrégé -et pour retrouver par continuité le cas d'une couche homogène (où $q_1 = q_2$) — nous prendrons désormais $\forall z \in [0, h_1]$

$$\varphi_1(z) = \begin{cases} \text{sh } [q_1(z + z_0)] & \text{cas (8)} \\ \sin[q_{01}(z + z_0)] & \text{cas (9)} \end{cases} \Rightarrow \varphi_{01}(z) = \begin{cases} \frac{1}{q_1} \text{ch } [q_1(z + z_0)] \\ -\frac{1}{q_{01}} \cos [q_{01}(z + z_0)] \end{cases} \quad (17)$$

de sorte que la condition (2.3) s'écrit:

$$\Theta^2 = \begin{cases} g q_1 \text{th } [(q_1(h_1 + z_0))] & \text{cas (8)} \\ -g q_{01} \text{tg } [q_{01}(h_1 + z_0)] & \text{cas (9)} \end{cases} \quad (18)$$

Condition (2.4)

Eu égard à (13) et (15), (2.4) s'écrit, $\forall (x, y) \in (D + \bar{D}), \forall t$;
 $\Theta (-A_1 \sin \Theta t + B_1 \cos \Theta t) \varphi_1(0) - \Theta (-A_2 \sin \Theta t + B_2 \cos \Theta t) \varphi_2(0) = 0$
 Cela entraîne:

$$A_1(x, y) \varphi_1(0) = A_2(x, y) \varphi_2(0); \quad B_1(x, y) \varphi_1(0) = B_2(x, y) \varphi_2(0) \quad (19)$$

d'où on tire

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\varphi_2(0)}{\varphi_1} = C^{te}; \quad \forall (x, y) \in (D + \bar{D})$$

Or, chacune des fonctions (A_i, B_i) est solution de l'équation linéaire et homogène (7.2) que nous transcrivons:

$$\Delta \varepsilon_{oi} + q_1^2 \frac{\Theta^2 - 4\omega^2}{\Theta^2} \varepsilon_{oi} = 0$$

La condition (19) ne peut donc être vérifiée que si:

$$q^2 = q_1^2 = q_2^2 \quad (20)$$

en sorte que $q_1 = q_2$ ou $q_{01} = q_{02}$. Ainsi $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ ne peuvent différer que par une constante multiplicative. En second lieu, (A_i, B_i) sont astreintes à vérifier le système (14) de conditions frontières, lesquelles sont encore linéaires et homogènes et, de plus, indépendantes de i . Dans ces conditions, il est loisible de remplacer (A_2, B_2) par $\left(\frac{A_2}{K}, \frac{B_2}{K}\right)$, la constante non nulle K étant choisie de façon que l'on ait:

$$A \equiv A_1(x, y) \equiv A_2(x, y); B \equiv B_1(x, y) \equiv B_2(x, y); \forall (x, y) \in (D + \bar{D}) \quad (21)$$

Adoptant cette convention une fois pour toutes, (20) montre alors (cf. (12), (17)) que l'on doit avoir:

$$\frac{\varphi_2(0)}{\varphi_1(0)} = \begin{cases} \frac{m \operatorname{sh}(q h_2)}{\operatorname{sh}(q z_0)} = 1 & \text{cas (8)} \\ \frac{m \sin(q_0 h_2)}{\sin(q_0 z_0)} = 1 & \text{cas (9)} \end{cases} \quad (22)$$

On retiendra de la discussion précédente qu'en vertu de (20), les fonctions $A(x, x)$ et $B(x, y)$, qui décrivent le mouvement horizontal du liquide sont identiques dans les deux couches et qu'il en est de même du paramètre q^2 , qui caractérise le mouvement vertical.

Condition (2.5)

D'après (2.4), (2.5) s'écrit:

$$\left(\varrho_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \varrho_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} \right) = g W_2 \Delta \varrho; \quad z = 0; \quad \forall t; \quad \forall (x, y) \in (D + \bar{D})$$

(12), (13), (15), (17), (22), cela donne:

$$\Theta^2 [\varrho_2 \varphi_{02}(0) - \varrho_1 \varphi_{01}(0)] = g \varphi_2(0) \Delta \varrho$$

Par suite, on a:

$$\begin{aligned} \Theta^2 [\varrho_2 m \operatorname{ch}(q h_2) - \varrho_1 \operatorname{ch}(q z_0)] &= g q m \Delta \varrho \operatorname{sh}(q h_2) & \text{cas (8)} \\ \Theta^2 [\varrho_2 m \cos(q_0 h_2) - \varrho_1 \cos(q_0 z_0)] &= g q_0 m \Delta \varrho \sin(q_0 h_2) & \text{cas (9)} \end{aligned} \quad (23)$$

2.4. Résultats du problème aux limites

Les formules ci-dessus font intervenir des paramètres de deux sortes: $\varrho_1, \varrho_2, h_1, h_2, \omega$ et g sont des données a priori. Θ, p, m, z_0 ont été introduits à titre de constantes d'intégration; nous les appellerons les paramètres de fonctionnement. Ils sont astreints à vérifier les trois relations (18), (22), et (23) que nous regroupons pour la commodité du lecteur:

$$\begin{aligned} \Theta^2 &= g q \operatorname{th}[q(h_1 + z_0)] \\ m \operatorname{sh}(q h_2) &= \operatorname{sh}(q z_0) \\ \Theta^2 [\varrho_2 m \operatorname{ch}(q h_2) - \varrho_1 \operatorname{ch}(q z_0)] &= g q m \Delta \varrho \operatorname{sh}(q h_2) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Theta^2 &= g q \operatorname{th}[q(h_1 + z_0)] \\ m \operatorname{sh}(q h_2) &= \operatorname{sh}(q z_0) \\ \Theta^2 [\varrho_2 m \operatorname{ch}(q h_2) - \varrho_1 \operatorname{ch}(q z_0)] &= g q m \Delta \varrho \operatorname{sh}(q h_2) \end{aligned}} \right\} \text{cas (8)} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Theta^2 &= -g q \operatorname{tg}[q_0(z + z_0)] \\ m \sin(q h_2) &= \sin(q_0 z_0) \\ \Theta^2 [\varrho_2 m \cos(q_0 h_2) - \varrho_1 \cos(q_0 z_0)] &= g q_0 m \Delta \varrho \sin(q_0 h_2) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Theta^2 &= -g q \operatorname{tg}[q_0(z + z_0)] \\ m \sin(q h_2) &= \sin(q_0 z_0) \\ \Theta^2 [\varrho_2 m \cos(q_0 h_2) - \varrho_1 \cos(q_0 z_0)] &= g q_0 m \Delta \varrho \sin(q_0 h_2) \end{aligned}} \right\} \text{cas (9)}$$

Ces relations caractérisent la distribution verticale du mouvement $\varphi_1(z)$ quelle que soit la géométrie du bassin. Il suit de là qu'il faut vérifier que

les relations (24) soient compatibles qu'il reste pour le moment un paramètre de fonctionnement arbitraire. On notera que ω ne figure pas dans (24).

La distribution horizontale du mouvement est donnée par les fonctions A et B, identiques dans les couches 1 et 2. Elles sont solutions de l'équation:

$$\Delta \varepsilon_0(x, y) + \varepsilon_0(x, y) = 0 \quad \text{où } \lambda = q^2 \frac{\Theta^2 - 4\omega^2}{\Theta^2} \quad \forall (x, y) \in (D + \bar{D}) \quad (25)$$

avec les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} 2\omega \frac{dA}{ds} + \Theta \frac{dB}{dn} &= 0 \\ 2\omega \frac{dB}{ds} + \Theta \frac{dA}{dn} &= 0 \end{aligned} \quad \forall (x, y) \in \bar{D} \quad (26)$$

On sait par extension au cas du bassin tournant des résultats classiques de la théorie des seiches dans un bassin fixe, que:

Si $\Theta \neq \pm 2\omega$, le problème (25, 26) n'admet de solution non nulle que si q^2 et Θ vérifient une relation de la forme:

$$F(q^2, \Theta, \omega) = 0 \quad (27)$$

qui dépend de \bar{D} . A tout couple, q^2, Θ de solution de l'équation précédente, correspond un couple A(x, y), B(x, y) de solutions de (25) définies à une constante multiplicative près et qui sont linéairement distinctes. Le cas $\Theta = \pm 2\omega$ doit être étudié à part.

On a ainsi une relation entre Θ et q^2 qui dépend de ω mais qui ne fait pas intervenir les autres paramètres de fonctionnement, à savoir z_0 et m .

L'ensemble des équations (24) et (27) forme un système de quatre relations liant les paramètres de fonctionnement: Θ, q, m, z_0 aux paramètres donnés. On définit ainsi — quitte à vérifier la résolubilité du système obtenu — la suite Θ_n des périodes propres des seiches de la bicouche et la suite des q_n^2 qui caractérise les mouvements verticaux de la masse liquide.

2.5. Discussion de (24) pour \bar{D} quelconque

Éliminons m et z_0 entre les trois relations (24). On trouve.

$$\left. \begin{aligned} \Theta^4 \left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} R_1 \right) - \Theta^2 g q Q_1 + \frac{\Delta \varrho}{\varrho_2} g^2 q^2 R_1 &= 0 \\ Q_1 = \text{th}(q h_1) + \text{th}(q h_2); \quad R_1 = \text{th}(q h_1) \text{th}(q h_2) \end{aligned} \right\} \text{cas (8)} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta^4 \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} R_2 \right) + \Theta^2 g q_0 Q_2 + \frac{\Delta \varrho}{\varrho_2} g^2 q_0^2 R_2 &= 0 \\ Q_2 = \text{tg}(q_0 h_1) + \text{tg}(q_0 h_2); \quad R_2 = \text{tg}(q_0 h_1) \text{tg}(q_0 h_2) \end{aligned} \right\} \text{cas (9)}$$

D'un autre côté, en mettant (15) sous la forme:

$$\varepsilon_1(x, y, z, t) = \sqrt{A^2 + B^2} \varphi_1(z) \cos(\Theta t + \Psi)$$

on déduit le rapport algébrique des amplitudes à la surface libre Σ et de celle de l'interface S.

$$\frac{\varepsilon_1(h_1)}{\varepsilon_1(0)} = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{Q_1 \operatorname{ch}(qh_1)}{2 \operatorname{th}(qh_2)} \left[2 \frac{\Delta \varrho}{\varrho_2} \frac{\operatorname{tg}(qh_2)}{Q_1} - 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\Delta \varrho}{\varrho_2} \frac{R_2}{Q_1^2} \left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} R_1\right)} \right] \quad \text{cas (8)}$$

$$\frac{\varepsilon_1(h_1)}{\varepsilon_1(0)} = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{Q_2 \cos(q_0 h_1)}{2 \operatorname{tg}(q_0 h_0)} \left[2 \frac{\Delta \varrho}{\varrho_2} \frac{\operatorname{tg}(q_0 h_2)}{Q_1} - 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\Delta \varrho}{\varrho_2} \frac{R_2}{Q_2^2} \left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} R_2\right)} \right] \quad \text{cas (9)} \quad (29)$$

On notera qu'en posant $u = g h_1$, les seconds membres de (29) sont des fonctions de u , dépendant que des paramètres adimensionnels $\frac{h_2}{h_1}$ et $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$.

Les formules (28) et (29) ont été données et discutées pour la première fois en [9]. Nous renvoyons le lecteur à ce travail, nous bornant à en faire ressortir les conclusions qualitatives essentielles.

L'étude du rapport $\varepsilon_1(h_1)/\varepsilon_1(0)$ est fondamentale pour classer les phénomènes étudiés. Si ce nombre est petit vis-à-vis de l'unité, on a une seiche interne; la seiche est externe lorsque $\varepsilon_1(h_1)/\varepsilon_1(0)$ est comparable à 1. L'analyse des données concrètes montre que $\varepsilon_1(h_1)/\varepsilon_1(0)$ peut être très petit, de l'ordre de 10^{-2} dans les cas réalisés expérimentalement; $z_0 + h_1$ est alors assez petit, dans le cas (8), ou voisin de $\frac{n\pi}{q_0}$, n étant entier, dans le cas (9). Mais une discussion un peu plus poussée prouve que le cas limite est incompatible avec (24): on a toujours $\varepsilon_1(h_1) \neq 0$. En d'autres termes, la surface isobare Σ ne peut jamais se confondre avec un plan nodal, bien que les dénivellations puissent y être pratiquement imperceptibles. Mais si $\varphi_1(z)$ est petit pour $z = h_1$, φ_{01} est, d'après sa définition même, voisin de son maximum, dans le cas (9). Il s'en suit que les amplitudes des vitesses horizontales sur Σ seront alors également voisines de leur plus grande valeur; et dans le cas (8), c'est encore la même chose car $\varphi_{01}[q(z + z_0)]$ est une fonction croissante de z .

L'équation (28) est bicarrée en Θ ; les racines en Θ^2 sont réelles en même temps que le radical figurant au second membre de (29). On a, en effet, en résolvant, pour fixer les idées, (28.1) en Θ^2 .

$$\Theta^2 = \frac{Q}{2 \left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} R_1\right)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\Delta \varrho}{\varrho_2} \frac{R_1}{Q_1^2} \left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} R_1\right)} \right] \quad (30)$$

On voit que des deux racines en Θ^2 sont positives quand elles sont réelles: car les paramètres $h_1, h_2, \varrho_1, \varrho_2, \Delta\varrho = \varrho_2 - \varrho_1, q$ étant par hypothèse, positifs, on a, d'après (28.1): $Q_1 > 0, R_1 > 0$. Il est malaisé de pousser plus loin la discussion en raison du nombre élevé de paramètres en jeu, mais dans la plupart des cas pratiques, une des racines donne la pulsation du mode interne et l'autre celle du mode externe, ces deux modes pouvant coexister.

Le rapport $\varepsilon_1(h_1)/\varepsilon_1(0)$ étant algébrique, il s'en suit que les oscillations verticales de la surface libre et de l'interface peuvent être en concordance ou en opposition de phases.

Notons que lorsque $\Delta\varrho/\varrho_2$ est petit, le calcul de $\varepsilon_1(h_1)/\varepsilon_1(0)$ des modes internes et externes devient explicite (cf. [6]).

3. SEICHES DANS UN BASSIN PARALLÉLÉPIPÉDIQUE TOURNANT

3.1. Notations. Equations du problème. Résolution approchée

Dans ce chapitre, nous étudions les seiches dans la bassin parallélépipédique, de base D définie par:

$$0 \leq X \leq a; \quad 0 \leq y \leq b \quad (31)$$

on pose:

$$\mu = aq \frac{\omega}{\Theta}; \quad \nu = \frac{bq}{2}; \quad F = \frac{\Theta}{2\omega}$$

$$L_r = \frac{b}{a} \sqrt{|\lambda a^2 - r^2 \pi^2|}; \quad \beta_r = \frac{L_r}{2}$$

Ce problème a déjà été traité en [1] et [10] dans la cas des ondes longues pour une monocouche. Nous nous limitons au cas (8). L'adaptation au cas (9) est formellement aisée; mais la discussion devient alors plus longue.

La méthode utilisée en [1] et [10] consiste à chercher la solution de (25) sous forme de séries à termes réels si $q^2 > 0$.

$$\begin{aligned} A = & -Y_0 \sin \left[q \left(y - \frac{b}{2} \right) \right] \operatorname{ch} \left[\frac{q}{F} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] - \\ & - \cos \nu \operatorname{sh} \mu \sum_{r=2n+1}^{\infty} Y_r \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_r} \frac{a L_r}{r F b \pi} \operatorname{sh} \left[\frac{L_r}{b} \left(y - \frac{b}{2} \right) \right] \sin \left(r \pi \frac{x}{a} \right) + \\ & + \sin \nu \operatorname{ch} \mu \sum_{r=2n}^{\infty} Y_r \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_r} \operatorname{sh} \left[\frac{L_r}{b} \left(y - \frac{b}{2} \right) \right] \cos \left(r \pi \frac{x}{a} \right) \\ B = & Y_0 \cos \left[q \left(y - \frac{b}{2} \right) \right] \operatorname{sh} \left[\frac{q}{F} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] - \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 & - \cos v \operatorname{sh} \mu \sum_{r=2n+1}^{\infty} Y_r \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_r} \operatorname{ch} \left[\frac{L_r}{b} \left(y - \frac{b}{2} \right) \right] \cos \left(r \pi \frac{x}{a} \right) - \\
 & - \sin v \operatorname{ch} \mu \sum_{r=2n}^{\infty} Y_r \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_r} \frac{a L_r}{r F b \pi} \operatorname{ch} \left[\frac{L_r}{b} \left(y - \frac{b}{2} \right) \right] \sin \left(r \pi \frac{x}{a} \right)
 \end{aligned}$$

Il s'agit donc là d'une solution formelle où l'entier n varie de 1 à ∞ et où $Y_1 \dots, Y_2 \dots$ sont des constantes à déterminer. Pour $r=0$, le coefficient de Y_r définit la répartition des amplitudes d'une onde stationnaire de Kelvin (la constante Y_0 qui caractérise l'amplitude du mouvement reste arbitraire). Pour $r \geq 1$, on obtient la loi des amplitudes pour les ondes stationnaires de Poincaré. On appelle également ces ondes respectivement: amphydromie de Kelvin et onde de Poincaré de deuxième espèce.

Cela posé, la marche des calculs est la suivante. Les conditions frontières (26) se présentent sous forme d'un système infini d'équations linéaires et homogènes à une infinité d'inconnues Y_r ($r \geq 1$). Nous égalons à zéro le déterminant infini du système traduisant (26). Pour le résoudre numériquement, on prend les déterminants principaux d'ordre $p = 2, 3, \dots$. On résout, pour chaque approximation p , le système (27), (28), correspondant, qui donne Θ_p (et $T_p = \frac{2\pi}{\Theta_p}$ la période propre correspondante), q_p, Y_r, β les solutions du problème en Θ, q et Y_r .

Une fois ces résultats acquis, la détermination numérique des paramètres de fonctionnement restant, à savoir z_0 et m , s'obtient à partir des relations (24).

Remarque à propos de la notion de latitude critique:

Une discussion approfondie de nos formules résolutive permet de vérifier que la solution du problème, envisagée comme fonction du paramètre $\Theta^2 - 4\omega^2$ est continue dans le voisinage de la valeur zéro de celui-ci.

3.2. Résultats numériques

Les calculs numériques ont été faits pour les valeurs suivantes des paramètres:

$$\begin{aligned}
 a &= 0,50 \text{ m}; & b &= 2,03 \text{ m}; & h_1 &= h_2 = 0,15 \text{ m} \\
 \rho_1 &= 0,99895 \text{ g/cm}^3; & \rho_2 &= 1,01745 \text{ g/cm}^3
 \end{aligned}$$

et pour diverses valeurs de ω allant de 0 à 0,26 radians/sec.

Nous résumons ici les résultats:

3.2.1. Influence de la vitesse de rotation sur la période propre du système

On ne s'intéresse ici qu'à la racine en Θ de l'équation (30) qui correspond à l'onde interne $(\varepsilon_1(h_1)/\varepsilon_1(0))$ petit. On constate:

- Pour une vitesse de rotation donnée, la convergence du processus de calcul est étonnamment rapide. On constate par exemple que dès la deuxième approximation $p = 2$ la période est connue à 0,005 s près, soit une précision de 10^{-4} ; et pour avoir la même précision sur q , il suffit d'aller à l'ordre 3.
- La loi de variation de la période T en fonction de la vitesse de rotation ω est une fonction légèrement croissante. Θ_0 étant la pulsation pour $\omega = 0$, on a constaté que la prise en compte des termes d'accélération verticale modifiait Θ_0 de 2%. Ajoutons que l'influence de la rotation est d'autant plus faible que le bassin a une forme plus allongée et que $\frac{\Delta\Theta}{\Theta_0}$ est plus grand.

3.2.2. Influence de la rotation sur la forme de l'interface

La calcul des constantes Y_r est long, mais on constate une convergence très rapide de la solution. Dans notre cas particulier, il suffit de faire $p = 4$ pour obtenir une précision de 1%.

On vérifie aussi numériquement que la convergence est d'autant plus rapide que les ondes de Poincaré sont relativement plus faibles, c'est-à-dire que la rotation est plus lente ou que le canal est plus allongé.

Les calculs montrent que long du plan $y = 0$, les amplitudes du mouvement sont pratiquement constantes. Près des angles du rectangle, la somme des amplitudes des ondes de Poincaré atteint 25% pour $\frac{2\omega}{\Theta_0} \neq 2$ soit pour $\omega = 0,16$.

4. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les mesures expérimentales ont été faites sur une bicouche avec faible écart de densité (1,85%), contenue dans un bassin rectangulaire placé sur la plaque tournante de l'Université de Grenoble. Pour connaître plus de détails, le lecteur est prié de se reporter à [5] et [9].

4.1. La plaque tournante

On trouvera une description de cet instrument encore unique au monde dans [7]. Nous rappelons ici ses principales caractéristiques tech-

niques: diamètre 14 m., poids à vide 150 t., charge admissible $1T/m^2$, vitesse de rotation 0 à 2 tours/mn., réglable à 10^{-4} près en valeur relative, planéité du mouvement 0,02 mm.

4.2. Le canal oscillant

On a déjà donné ses dimensions. On trouvera une description en [5]. L'axe Oz est placé suivant la normale au parabolôïde représentant la surface équipotentielle du champ résultant de forces de pesanteur et centrifuge en 0. Notons ici que le mouvement des ondes est engendré par une très faible oscillation du canal autour de la droite $y = \frac{b}{2}$, $z = 0$.

Lorsque la période d'excitation est très voisine de la période propre du premier mode interne, le mouvement devient mesurable. Les liquides utilisés sont l'eau et l'eau salée. Leurs masses volumiques peuvent être ajustées à 10^{-5} près. Un remplissage soigné, effectué en injectant le liquide dense très lentement sous le liquide léger, permet d'obtenir des interfaces dont l'épaisseur est de l'ordre du demi — centimètre. Après quelques expériences, il atteint 1 cm.

4.3. Mesures

Les mesures de période s'opèrent à l'aide d'une sonde de conductimétrie placée au point fixe, à la cote moyenne de l'interface. L'excitation du canal est alors arrêtée de façon à ce que l'onde soit libre. Nous obtenons précision de 0,01 s.

La même sonde est utilisée pour enregistrer le mouvement de l'interface. Elle est alors asservie à poursuivre une surface de conductivité constante à l'aide d'un système électro-mécanique très précis, puisque nous obtenons une précision de 0,05 à 0,1 mm. L'ensemble de ces appareils a été construit à notre laboratoire.

4.4. Résultats

4.4.1. Mesure de la période

La courbe (fig. 1) donne la variation de la période propre en fonction de la vitesse de rotation ω . On constate une allure générale de la courbe expérimentale très voisine de celle de la courbe théorique, mais il y a un écart systématique de 0,56 s. A l'aide d'expériences appropriées et très fines, que nous ne pouvons pas décrire ici (voir [5]). Nous avons pu montrer

que cet écart provient très exactement de l'épaisseur de l'interface que l'on ne peut rendre inférieur à 1 cm en pratique. D'ailleurs, la courbe donnant la variation relative de la période rapportée à la période $T_0 = \frac{2\pi}{\theta_0}$ pour $\omega = 0$ montre l'excellente concordance des résultats.

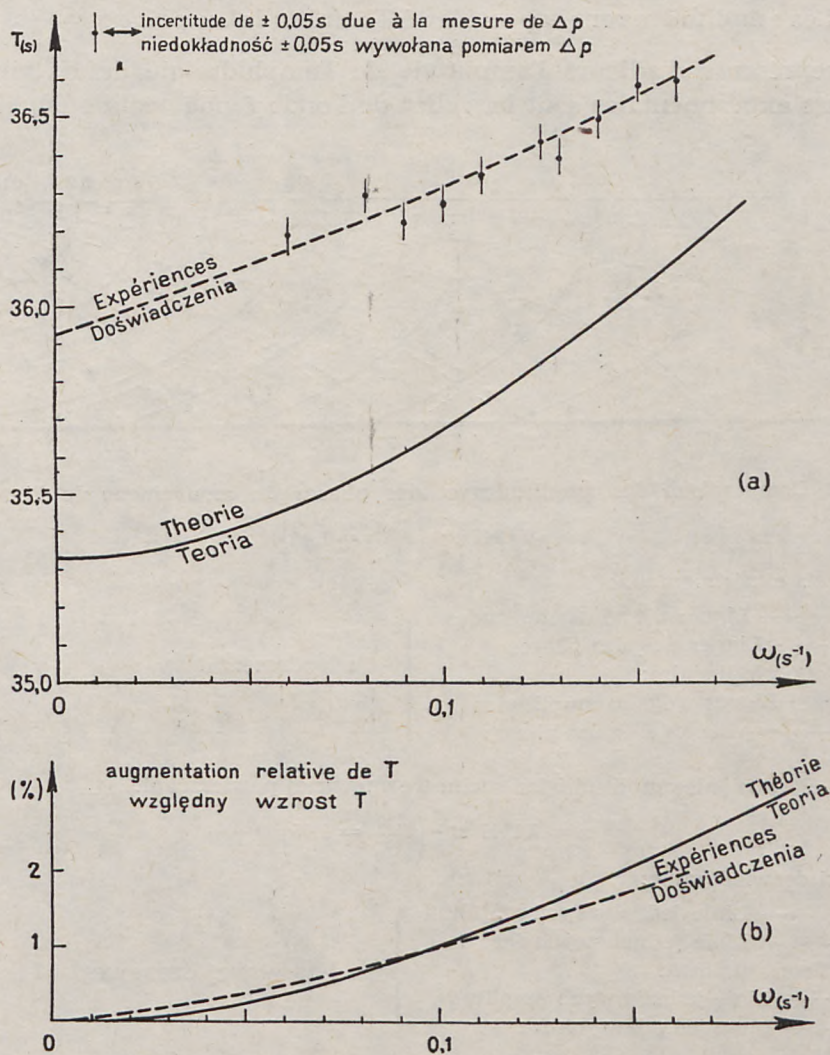


Fig. 1. Augmentation, par la rotation, de la période propre de la seiche d'interface, pour $\rho_1 = 0,99895$ et $\rho_2 = 1,01745$ g/cm³

Ryc. 1. Wzrost okresu własnego sejszy wewnętrznej w wyniku rotacji dla $\rho_1 = 0,99895$ i $\rho_2 = 1,01745$ g/cm³

4.4.2. Forme de l'interface

La figure (2) donne une comparaison des amplitudes et des phases du mouvement de l'interface mesuré en 80 points dans le quart du canal, défini par: $\frac{a}{2} < x < a$; $0 < y < \frac{b}{2}$ pour $\omega = 0,1247$ rad/sec et $\frac{2\omega}{\Theta_0} = 1,45$.

Les amplitudes sont rapportées à l'amplitude au point $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ qui représente d'ailleurs l'amplitude de l'amphidromie de Kelvin. Les valeurs expérimentales sont ici celles de l'onde fondamentale dépouillées

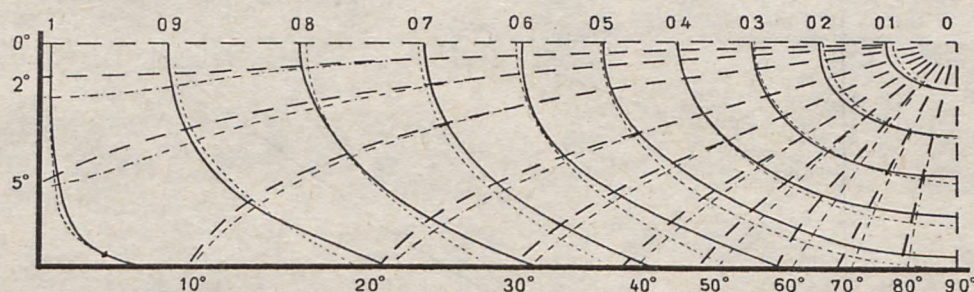


Fig. 2. Comparaison des amplitudes et des phases du mouvement de l'interface.

$$\omega = 0,1247 \text{ s}^{-1} \left(\frac{2\omega}{\Theta_0} = 1,45 \right)$$

Résultats expérimentaux:

—	Lignes d'égales amplitudes	} du fondamental temporel
- - -	Lignes d'égales phases	
Théorie linéaire:		
····	Lignes d'égales amplitudes	
- · - ·	Lignes d'égales phases	

Ryc. 2. Porównanie amplitud i faz ruchu wewnętrznej powierzchni:

$$\omega = 0,1247 \text{ s}^{-1} \left(\frac{2\omega}{\Theta_0} = 1,45 \right)$$

Wyniki doświadczalne:

—	Linie jednakowych amplitud	} podstawowej czasowej
- - -	Linie jednakowych faz	
Teoria liniowa:		
····	Linie jednakowych amplitud	
- · - ·	Linie jednakowych faz	

de la contribution des harmoniques temporels dûs aux phénomènes non linéaires. Notons que les écarts les plus grands entre théorie et expérience ne représentent que 0,1 mm sur les amplitudes et quelques degrés sur les phases.

Ces écarts s'observent sur la figure (3) qui donne une coupe des surfaces précédentes donnant la distribution des amplitudes du fondamental, par le plan $x = \frac{a}{2}$; et cela pour 5 vitesses de rotation différente. Les points donnent les valeurs expérimentales, les courbes sont les résultats du calcul théorique.

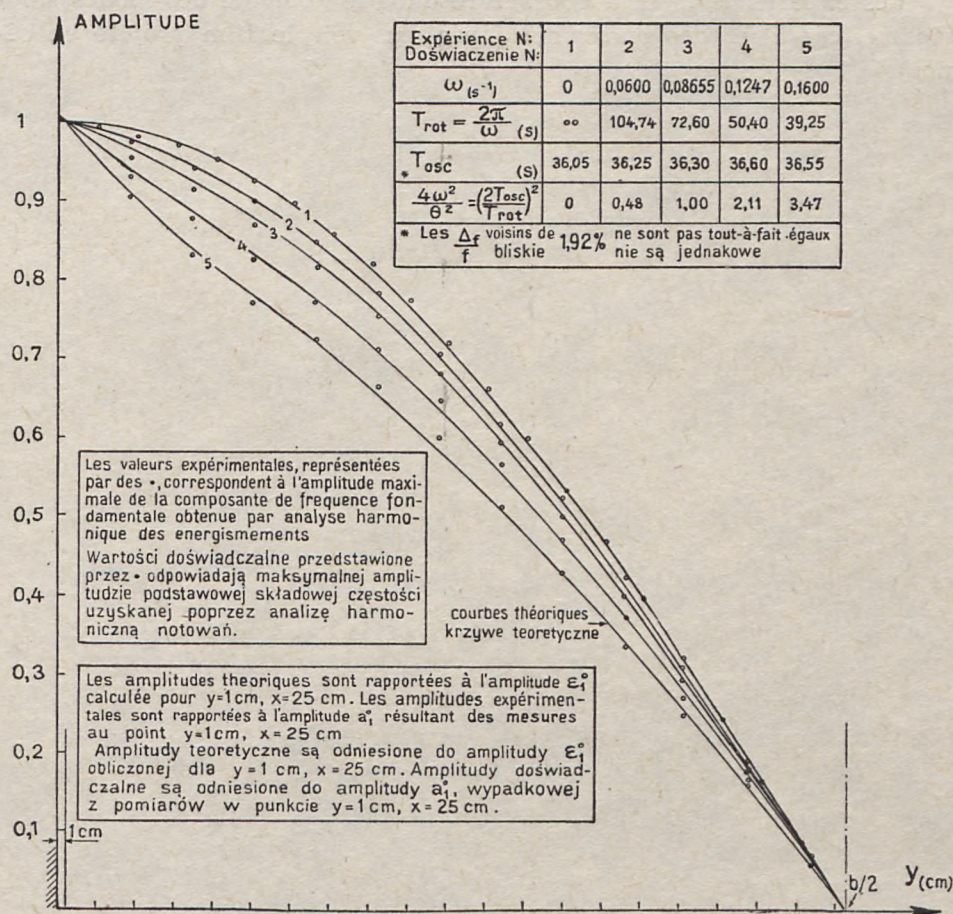


Fig. 3. Ondes d'interface dans un bassin rectangulaire tournant. Coupes longitudinales médianes du fondamental temporel pour diverses vitesses de rotation (théorie et expériences)

Ryc. 3. Fale wewnętrzne w prostokątnym basenie obrotowym. Osiowe przekroje podłużne fali podstawowej czasowej dla różnych prędkości obrotu (teoria i doświadczenia)

5. CONCLUSION

Nous avons pu montrer par des expériences fines de laboratoire faites sur une cuve de dimensions assez grandes, qu'une théorie complète avec prise en compte des accélérations verticales, permettait de donner une image très exacte de la réalité physique. La théorie linéaire a donné des résultats à 0,5% près pour des amplitudes de l'ordre de 2 cm.

Les expériences sont à poursuivre dans le domaine des modes sinusoïdaux (cas 9) et des ondes non linéaires (voir le film projeté en séance).

GABRIEL CHABERT D'HIÈRES

JEAN-LOUIS SUBERVILLE

Uniwersytet w Grenoble I

Instytut Mechaniki

STUDIA TEORETYCZNE I DOŚWIADCZALNE
FAL WEWNĘTRZNYCH
W OŚRODKU UWARSTWIONYM, OBROTOWYM

Streszczenie

W pracy przeanalizowano własności małych oscylacji cieczy doskonałej, niejednorodnej, o swobodnej powierzchni, znajdującej się w basenie obracającym się dookoła osi pionowej. Zdefiniowano różne typy zaobserwowanych fal oraz wpływ wywierany na nie przez geometrię basenu, stratyfikację cieczy oraz ruch obrotowy.

Badania laboratoryjne, przeprowadzone w cieczy dwuwarstwowej w basenie prostopadłościennym, poddanym ruchowi obrotowemu, potwierdziły teorię. Rozwiązaniem jest superpozycja fal Kelvina i fal Poincaré drugiego rzędu. Wszystkie fale były wytwarzane z dokładnością: amplitudy do kilku dziesiątych części milimetra, a fazy do kilku stopni. Wykonany film przedstawia zjawisko liniowe oraz jego deformacje, kiedy amplituda wzrasta albo gdy głębokości obu cieczy bardzo się różnią.

GABRIEL CHABERT D'HIÈRES

JEAN-LOUIS SUBERVILLE

Academy of Grenoble I

Institute of Mechanics

A THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF WAVES IN STRATIFIED ROTATING MEDIUM

Summary

This paper deals with the study of the properties of small oscillations of free-surface, non-homogeneous perfect fluids confined in basins subjected to a rotary movement about a vertical axis. Details are given of the various waves encountered and the respective effects of the basin geometry, the fluid stratification and the rotation.

Laboratory experiments carried out using a two-layer fluid in a revolving basin of parallelepipedal form confirm the theory. The solution is expressed by the superimposing of Kelvin waves and second kind of Poincaré waves. All these waves are reproduced experimentally to within a few tenths of a mm. accuracy for amplitudes and to within a few degrees for phases. A film shows the linear phenomenon and its deformations when the amplitude increases or the depths of the two liquids become very different.

BIBLIOGRAPHIE

LITERATURA

1. Bonnefille R., *Contribution théorique et expérimentale à l'étude du régime des marées*, Thèse de Doctorat, Grenoble 1968.
2. Brillouin M., Coulomb J., *Oscillations dans un liquide pesant dans un bassin cylindrique en rotation*, Paris, Gauthier-Villars 1933.
3. Chabert d'Hières G., *Memoires et travaux de la Societé Hydrotechnique de France. Houille Blanche*, Supplement au volume 1, 1962, 130.
4. Chabert d'Hières G., Gouyon R., Kravtchenko J., *Contribution à l'étude du clapotis plan*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées XLIII, 1964, 1, 125—165.
5. Chabert d'Hières G., Suberville J.-L., *Etudes expérimentales des ondes à l'interface d'une bicouche dans un canal parallélépipédique tournant*, Actes du 2ème symposium Franco-Soviétique d'Océanographie, Grenoble 1975, A paraître „cahiers hydrographiques”.
6. Kravtchenko J., Suberville J.-L., *Etude théorique des ondes internes dans les eaux d'un bassin en rotation*, Actes du 2ème symposium Franco-Soviétique d'Océanographie, Grenoble, Août 1975, A publier „cahiers hydrographiques”.
7. Rao R., *Free gravitational oscillations in rotating rectangular basins*, Journal of Fluid Mechanics 25, 1966, 3, 523—555.
8. Saint-Guily B., *Ondes liquides de gravité en milieu inhomogène et dans un bassin tournant*, Journal de Mécanique 2, 1963, 4, 425—435.
9. Suberville J.-L., *Ondes internes en fluide tournant. Contribution théorique et expérimentale*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble 1974.
10. Taylor G.I., *Tidal oscillations in gulfs and rectangular basins*, Proc. London Math. Soc. 2, 1921, 20, 197—229.